

66 学界通常认为,马克思对数学的研究,只是他在政治经济学研究之外的“业余消遣”。然而,通过对《马克思恩格斯全集》历史考证版第II部分新发表的马克思经济学手稿、数学手稿和马恩书信进行仔细分析后发现,马克思自19世纪60年代以来就致力于将数学运用于经济学研究,目的是要通过数学方法找出普遍适用的经济学规律,并对自己的系列经济学概念,包括价值、剩余价值、利润和平均利润等等进行逻辑推导。马克思是出于经济学目的而从事数学研究的。

99 在本文中,我要探讨1857到1882年间马克思对数学问题,尤其是高等代数学的集中研究,以及这一研究对马克思经济学说产生的影响。

通过这场讲座,我希望向各位证明,这里所讨论的主题对于马克思《资本论》的创作过程而言具有极为重要的意义。不过,我是不是引起了过高的期待,或者把话说得太满了呢?马克思从经济学角度研究数学,这在MEGA第二部分15卷中的14卷里,不论是在引言,还是在文本历史,亦或是在在名目索引中,都没有得到反映,这毕竟是一个无法忽视的事实。在某些经济学卷次中,如在第二部分4.1卷以及第3卷——这一卷在这里正由马列部翻译成中文,其中有大量重要的数学内容——中,编者甚至说明,在编辑完成的文本中,不会用文字表述代替数学符号,而是原样保留。在这些卷次的编辑说明中,对最简单的数学计算符号进行了解释,例如+,-,>,<,而这些符号对于每一位读者而言,都是早从学生时代就熟悉的。

只有在最近出版的第二部分卷次4.2(2012年)中,情况发生了变化。在这一卷中,编者指出了,本卷发表的文本提供了重要的线索,证明马克思是出于经济学目的而从事数学研究,并且,马克思已经着手将他的核心观点用数学加以表述。

马克思本人很少向我们揭示他进行数学研究的具体意图。只有一次,也就是在1858年,马克思指出,这和他《政治经济学批判大纲》中的经济学理论有关,他给恩格斯写信说:

“(我)在制定政治经济学原理时……,把代数迅速地温习一遍。”

而在后来写给恩格斯的其他书信中,马克思一再提到,有那么几天,几星期甚至好几个月的时间,马克思无法全身心地投入经济学写作,他就把这些时间用来研究微分学。数学是马克思业余消遣,打发时间的一种方式么?马克思的女婿,保尔·拉法格在1891年也回忆说,马克思曾“以一种独特的方式来忘记病痛和烦恼,那就是微积分。”

然而,马克思在1857至1881年间创作的政治经济学文本——其中很大一部分是在MEGA2中首次发表——所传达的却是另外一种信息。这些文本告诉我们,马克思当时显然不是打算将数学运用于经济学,不过不是简单的代数运算(马克思不会从事简单的运算),而是要在这些经济学数值之间找出普遍适用的规律,如果可能的话还打算用来精确计算动态的经济学数值,以及对经济学概念(价值—剩余价值—利润—平均利润)进行逻辑推导(转化)——这对于马克思来说也相当重要。因为马克思总是注意自然科学和社会科学的统一性,在这两个学科之间确立一种合理的,因而也是经得起推敲的研究方法上

(上接01版)

黄达(1925—)是一位教育家,是新中国金融学教材与课程体系的主要奠基者与引领者。他作为教师、学者、领导者,与中国人民大学65年的历史,与中国人民大学对中国教育和经济社会发展作出的贡献,始终相伴相随。他始终将不脱离教学第一线作为自己必须遵守的原则。黄达编写的《社会主义财政学》、《财政信贷综合平衡导论》、《货币银行学》、《金融学》等教材影响很大,特别是《金融学》这部中国金融学学科发展中又一本具有里程碑意义的教科书,是黄达花费数年心血研究界定的宽口径“金融”为范畴,与现代金融业的迅猛发展同步,充分吸收国内外金融理论研究的最新成果,代表了同期中国金融学学科基础理论教学的最高水平。

谷书堂(1925—2016)是一位杰出的政治经济学教育家。他在从事繁忙的教学和科学研究的同时,还担任南开大学经济学院的

的类比,对马克思而言应该是一大成就。与马克思的《大纲》相关的研究成果包括一系列阐述剩余价值(s)、生产阶段(p)、年生产时间(z)、流通时间(c)和周转次数(q/x)之间关系的公式。马克思在这里研究的是价值和剩余价值的最大限额的数学问题。马克思在阐述各个量之间的关系(比如必要劳动和剩余劳动之间的关系、生产时间和流通时间之间的关系)时一再利用未知数x和y。马克思在《政治经济学批判大纲》中认为,资本预付和资本回流的数学问题:

“应该用一个简单的等式来解决,这一点我们以后再谈。其实这个问题并不属于这里研究的范围。但是从以后要谈的信用问题来看,这个问题是很重要的。”

1862年10—11月,马克思在1861—1863年经济学手稿的第XV笔记本中写下了他对高数的期望:

“资本不是简单的数字。它不是简单的商品,而是自乘的商品;不是简单的量,而是量的比例。它是作为本金、作为既定的价值同作为剩余价值的它自己的比例。C的价值(按一年计算)等于 $C[1+(1/x)]$ 或 $C+(C/x)$ 。正像用简单的计算方法不可能理解或推算出 $ax = n$ 等式中的x一样,也无法理解或推算出自乘的商品,自乘的货币,资本。”

今天在座的各位《资本论》专家都了解,马克思在劳动中也发现了一种自乘的关系:复杂劳动是简单劳动的自乘。如果诸位熟悉数学,从上述引文中就可以看出,马克思实际值都是应用数学函数等式的可能性。两个数值都是变量,但其中的一个由另一个决定,即 $y=f(x)$ 。

1862—1863年间,马克思翻阅了伦敦大英博物馆里的数学文献,在工作室或者其他空闲地方,他摆上了一摞代数教科书,并在许多书里留下了清晰的阅读痕迹,包括许多旁注。对整个句子划线或者在定理下划线,他对其中一些做了摘录,并在经济学草稿中引用了这些摘录,只是很少注明出处。他对那些作者和书名并不感兴趣,而是关注逻辑链条或者说精确的计算路径。因此,他利用的是在中学中常见的教材,而不是专业论文。(我提醒大家回忆一下,我在《危机笔记》的摘录中就此说过的观点:马克思对作者和报纸均不感兴趣,他关注的是事实和人们处理这些事实的方式。马克思已经认识到,他必须研究这些领域,他也愿意这样做)。例如,1863年1—2月,在1861—1863年经济学手稿的第X笔记本中,马克思援引法国数学家路易·本杰明·弗朗克勒:

“资本(C)最初等于c(不变资本)+v(可变资本)。

产品P或C',即已实现的资本(因为资本只有成为增殖的价值,成为原价值加上剩余价值时才实现),等于不变资本,可变资本加剩余价值,后者等于X。因此,我们得出下列方程式:

(1) $C=c+v$ 。  
(2) $C'$ 或 $P=c+v+(v+x)$ 。

如果在第二个方程式中,我们假设 $x=0$ ,那么, $C'$ 或 $P=c+v$ ,即等于C。这就是说,在这种场合,产品的价值与原有资本的价值没有区别;因此,资本价值与原有资本。

如果我们列一个方程式 $y=f(x)$ ,这里f是x的函数,而且x变为 $x+h$ ,那么,从 $y=f(x)$ 可以得出 $Y=f(x+h)$ 。“很明显,如果 $Y=f(x+h)$ ,h等于零,那么,Y就变成y。”(弗朗克勒《微分学》)

马克思论证时多次用到英国物理学家伊萨克·牛顿的流数术(即函数计算和微积分),却没有提到牛顿。在马克思写于1863年的第六章《直接生产过程的结果》(第一册第I稿)中,就有这样一处具有重要的方法论意义的文本,而它在1866—67年间没有被《资本论》第一卷的付排稿采用:

某个价值额“所以变成资本,是由于它的量会增大,由于它会转化为一个变动的量,由于它从一开始就是一个会产生流数的流量。[……]无论怎样达到这一点,这种x转化为 $x+\Delta x$ 的实际程序决不会使这个过程的目的

# 马克思与数学

■ 卡尔·埃里希·福尔格拉夫

和结果发生任何改变。当然,即使没有资本主义生产过程,x也可以转化为 $x+\Delta x$ [……]x转化为 $x+\Delta x$ 的过程的这个目的,表明了研究必须经历增长的途径。这个式子必须是变量的函数,或者在过程中转化为变量的函数。[……]而问题就在于找出这个组成部分,同时指出通过什么中介过程使原来的常量变为变量。”

在马克思1865年春写的第二册第I稿中也有的一处与此类似的文字:

“在‘100塔勒资本和10塔勒剩余价值’这种说法中,这110塔勒表现为本身有差别的、内容不同的、表示资本主义关系的价值额,表现为100塔勒同作为资本的本身的关系,因为这是对10塔勒,即对从资本分出来的增长额的关系;在这种说法中,使100塔勒成为10塔勒的生产者的(生产过程的)媒介被消除了,完全被扬弃了。它仅仅还以这样的形式存在:100塔勒是基本额,10塔勒是它的增长额,它的补充额、派生额。……10塔勒同样地既可以构成总额的110,也可以构成预付资本总额的110。把最初额减掉,不管怎样的10塔勒都形成增长额,这增长额本身与流量量并无不同。完全像在积分数中一样,只要 $dx, dy$ 不再起作用,并且一个数的过程停下来, $dx, dy$ 作为增量就会消失。”

1863年1月,马克思在1861—1863年经济学手稿第XVIII笔记本中分析了安东·埃利泽·舍尔比利埃。1840年,这位瑞士经济学家和李嘉图主义者在他的著作《富或贫》中用代数方法研究了总产品(P,三个生产者分别是P、P?和P??)、资本(C)、实际消费的资本(c,三个生产者分别是c、c?和c??)、利润( $\pi$ )、利润对资本的关系(r)之间的比例,以及这些比例对价格的影响。这种阐述方式在当时很少见,也不为人所理解。因此,马克思指责舍尔比利埃的认识目的和叙述方式非常不历史:

“他提出的利润率的公式,或者说用数学来表示通常所理解的利润,本身并不包含任何规律;或者说甚至是绝对错误的,尽管他对这个事物有某种模糊的概念,接近于对它的了解。”

然而,马克思在此也清楚地表明了他自己的标准,以及他是如何看待为什么要在经济学中应用数学这一问题的:重要的不是把此前以文字加以表述的经济关系转换为公式,马克思在信中认为这是同义反复,多此一举。重要的是在精确公式的辅助下,找出经济领域中的具有规律性的关系。这样,有了公式的极大助益,人们就能在最小的空间上审视和讨论这个领域。这一点并不是什么新东西。早在1826年,德国经济学家约翰·亨利希·杜能就已经确定,“代数计算”一旦应用于研究对象,便能够发现普遍的规律。

1861年,马克思相信,自己在“数学上”毫无疑问是正确的。在马克思1861年底写《政治经济学批判》第III笔记本中,在“2. 绝对剩余价值”的标题下,他加了这样一个评注:

“从严谨的数学的角度来看,这里阐述的观点也是正确的。因而,用微分计算,假设 $y=f(x)+C$ ,其中C是不变量。x变为 $x+\Delta x$ ,不会改变C的值。因为不变量不发生变化,所以 $dc=0$ 。可见,不变量的微分是0。”

从1863年1月起,马克思还研究了英国数学家和力学家是怎样区分工具和机器的,他们在何种程度上——他认为是合理的——将机器理解为自乘的工具,但是,他批评说,这些数学家对于其质的和历史-经济语境有失考虑。后来,在《资本论》第一卷中,他又强调并大大扩充了这一论证。

1863年夏,马克思鼓励恩格斯像他一样研究微积分:

“我认为这对你的军事研究几乎是不可或缺的”,不过这个建议对于恩格斯来说是多余的。在座各位如果从事过恩格斯论军事战略和军事技术的文章的翻译,就会了解,恩格斯非常重视在这些领域应用数学。他多次称赞法国炮兵的“思维缜密”和“数学天才”,他们“鲜明的语言”和“科学的方法”。很可能恩格斯将著名的德国数学家欧拉视为榜样,欧拉的数学著作在海陆军中得到了广泛的应用。

1864年6月,马克思在信中主动向恩格斯解释了微分学的基本观点。在另一封信中,他又向自己的亲戚莱昂·菲力浦斯说明了人类是怎样从点数走向数字的,对于说明交换的产品价值估算和货币的产生来说,这是一个不可谓不重要的历史过程。他在这两封信中都没有说明他的数学知识出自何处。

1861—1863年经济学手稿笔记本的多个封面上都写有几何学和三角学的演算。可惜,MEGA2第二部分第3卷(第1—6分册)中,这些数学演算只是在标记描述中才被提到。马克思对英国经济学家和著名的李嘉图批评者赛米尔·贝利的批判,显示这些演算可能跟对“价值实体”的经济学阐述有关。在第XV笔记本上,他说,如果几何学,像这位著名的李嘉图批判者在谈到商品A和B等同时那样只满足于说,三角形表现在平行四边形上,平行四边形表现在三角形上,那几何学就不可能再前进一步了。马克思跟物理学家牛顿一样,谈论的是使事物可以相互比较的本质上的同一。在1864年的札记本中也有几页几何和三角学的演算——而且挨着单调数列、简单代数微分、高次幂二项式以及有关资本价值构成的高式、计算和有关资本机构改变时利润率的公式、计算。

对此,我想强调的是,我们对马克思写下这些数学论证的地方给予了比此前大得多的关注,在MEGA中这一点备受忽视。这种地方不仅表明了时间上的联系,而且也显示出了思路上的必将,相似性和启发,等等。马克思大可不必将自己对数学的思考写在1861—63年手稿笔记本的封面或者空白页上。他本来可以用散页来写,然后把它们归入更早的数学阐述。但马克思显然希望在数学论证和经济学手稿之间留下“有形的联系”,在这里是和1861—63年手稿,在别处则是与1868年或者更晚一些的手稿。马克思希望,自己在以后利用这些手稿时也能重温他此前写下这些数学论证的意图。

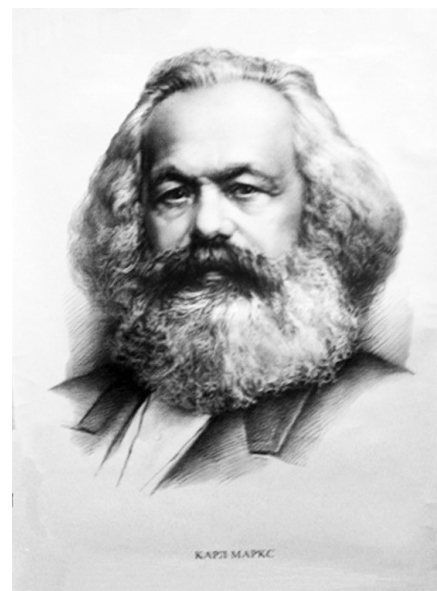
1864年5月,马克思借给恩格斯一本前面提到过的弗朗克勒的《纯数学完全教程》。几天后,恩格斯在一封信中评价了马克思对这本没有流传下来的书的旁注。由恩格斯的评论,我们得知:马克思只研究过这本书中的代数部分。而这一次,是恩格斯建议马克思继续研究代数学并且将之应用到经济学阐述中去,在恩格斯看来,马克思不应该再停留在这种“非常令人讨厌的”、还有许多错误的计算上:

“不管怎样好地利用数学例题来说明,我总觉得这里仅限于用数学,不如用 $a+b$ 作简单的代数说明来得清楚,这是因为一般的代数式更为简单明了,而这里用一般的代数式子也是不行的。”

马克思对数学的研究还反映在他的政治评论上。他喜欢在演说或文章中使用和数学相关的习语(例如,“具有数学精确性”,“在数学上完全准确”,“正如数学家所说的”,等等)。1861年,他在对各国内战的评论中,将英国报纸反对北方各州的贫乏论题比作“数学级数的公式”,“在一定的差距上重复着,很少有变异或组合的技巧”。不过,在马克思那里还有一些更加特别的言论,例如我在关于“六册计划”的讲座中提到的:马克思打算在必要时设第一分册的稿酬的最小值为0。

1866年,马克思认为自己已经非常熟悉数学领域,可以做出这样的评价:虽然法国哲学家奥古斯特·孔德作为数学家要比黑格尔强,但是从更高的角度看,黑格尔超越了他。恩格斯也非常相信马克思的数学造诣,一年前,恩格斯就曾对德国社会批判哲学家弗里德里希·阿尔伯特·朗格(此人或在关于“新陈代谢”一讲中提到过)说,马克思精通数学和哲学,他可能是唯一能够出版黑格尔数学研究手稿的人。

我们在《资本论》第一卷第一版中也能够找到马克思研究微分学的线索。牛顿的“增加值”(增长占额)这一重要概念,甚至在剩余价值理论中占据中心地位;转化为劳动力的资本被看作决定性的“流量”: $v + m = v + \Delta v$ (加v的增长额)。



马克思在第3章中提出了计算剩余价值率的一个公式,但是,他对这一表述还不太满意,所以,在第5章他又回到了这一问题,在那里提出了“剩余价值率的各种公式”。他认为,这些公式在“概念上是严格的”,因为它们抓住了本源的关系。事实上,即便这些公式还“不是有意识地制定的”,类似的东西在古典政治经济学家那里就已经存在了。但是,在他们那里,这些“派生的公式”,因而也是不够严谨的公式,会导致错误的结论。在马克思1863年写的1861—63年经济学手稿的第XIX笔记本上,马克思已经提出了核心的论证。在这里,我们可以找到马克思后来在70年代广泛研究函数和导数概念的根源。在这两处文本,即在《资本论》和1861—63年手稿中,马克思都将剩余劳动在数学上表述为必要劳动的一个函数。

无论如何,马克思感到他的著作中的好多地方都可以与数学相类比,比如谈到虚拟值的后面隐藏着真实的关系时,谈到同一术语表示不同的含义时,以及谈到中介的层面时:“要解决这个表面上的矛盾,还需要许多中项,就像从初等代数的角度来看,要了解(0/0)可以代表一个事实的数量需要很多中项一样。”

马克思在《资本论》第1卷论述资本积累的一般规律的导言中,马克思指出,“执行职能的资本”每年都获得一个“增值额”。在这里马克思已经在考虑,如何在数学上表述,在一定年份后单个资本只是由积累的剩余价值组成。但在生产的巨流中,全部原预付资本,与直接积累的资本即重新转化为资本……的剩余价值或剩余产品比较起来,总是一个近于消失的量(数学意义上的无限小的量)。

在接下来的1867—1868年的第二、三册手稿中,“执行职能的资本”这一概念频繁出现。从语源学上看,这个词来源于数学,马克思指的是每个单位时间内实际在增殖的资本,也就是说部分预付固定资本——这部分比如就是每年完成价值转移,和预付可变资本——这部分资本每年创造了新价值。“执行职能的资本”在价值上说明了从“真实的”成本价格到“资本主义的”成本价格的过程( $c + v \rightarrow c + v + m$ 或者 $f \rightarrow f?$ )。马克思的这一阐述方式在概念上是新的大胆尝试。但是与早先的论述产生了矛盾。“执行职能的资本”这个带有企业经济学性质的术语,与“发挥作用的资本”和“执行职能的资本家”这一对社会学概念不一致,而这对概念在1864—1865年第三册“主要手稿”中决定着马克思有关社会关系物化和颠倒的理念。这一概念还与作为商品资本、生产资本或货币资本“发挥职能的”资本不协调。在马克思的论述中出现了概念上的不一致,这是应该加以消除的。

跟前面的手稿一样,在第一卷第一版中也反复谈到生产过程中的准确的数学值和数学比例,甚至谈到了“比例数或比例的铁的规律”。马克思在关于相对剩余价值的生产一章中写道:“因此,工场手工业的分工不仅使社会总体工人的不同的器官简单化和多样化,而且也为这些器官的数量大小,即为从事每种专门职能的工人小组的相对人数或相对量,创立了数学上固定的比例。工场手工业的分工在发展社会劳动过程的质的组成的同时,也发展了它的量的规则和比例性。”

从对劳动并不构成的考察到对资本有机构成的阐述有必要迈向太大的距离,只要借助于线性方程组即可。

(下转03版)

## 影响中国经济学教育的经济学家

■ 白卫星《经济学家周报》副主编

党务和行政管理工作的,先后任南开大学经济系主任助理、系副主任、党支部书记,经济研究所常务副所长、所长,经济学院院长。他始终是一边作管理工作,一边亲自组织教学研究工作,亲自主编教材,亲自为学生授课,传授知识,释疑解惑。谷书堂认为,从推动中国经济学的整体发展来说,花费更多时间培养学生,能够做出更大的贡献。他的教育思想是开放性的,重视引进国外的专家交流,广聘国际人才,加强与国际学术界的交流,促成南开北美首批精算师中心落户南开,为我国培养出首批精算师,促进了中国精算业的发展。他全力扩展经济学院的学科体系,使其由原来的一系一所,发展成为几乎包括了全部经济与管理的专业学科,在不长的时间里,迅速建设了管理

学、金融保险学、国际经济与贸易学、会计学、旅游学、价格学、数量经济、城市经济学、产业经济学、交通经济等新兴应用学科,使当时南开的经济学学科总体水平站到全国最前列。谷书堂对经济学教学事业倾注了大量心血,贡献多,影响深。

刘诗白(1925—)是优秀的教育家和忠诚的教育工作者。作为“经济学界的西南王”,他从教数十载,成就卓著。作为经济学研究的领军者、学生健康成长的指导者、教育改革的实践者和良好社会风气的引领者,刘诗白心系高校学科建设,努力提携年轻后辈,为经济学教育事业的西南财经大学的发展,呕心沥血,为国家经济学学科建设和人才培养做出了重要贡献。

何炼成(1928—)一生未离开过西北大学

的讲坛,从事经济学教学60多年,把自己的知识和才华毫无保留地献给了西北大学的学子们。他在担任西北大学经济学院院长20多年,始终坚持在教学第一线,先后为讲授7门课程,受业学生逾万人,尤其是为培养了一批基础扎实、勇于创新的杰出中青年经济学家。如张维迎、魏杰、刘世锦、邹东涛,均出自他的门下。正因为这么多经济学家出自西北大学,所以有人把西北大学经济管理学院誉为“青年经济学家的摇篮”,把他誉为“经济学界的西北王”。

以上20位经济学家是德厚流光的大师,是推动经济学教育发展的风云人物。此外,樊弘(1900—1988)、漆琪生(1904—1986)、季陶达(1904—1989)、袁孟超(1905—1991)、王赣愚(1906—1997)、杨敬年(1908—

2016)、陈振汉(1912—2008)、周守正(1914—2016)、易大珩(1916—1991)、朱崇尧(1916—2008)、吴梦虹(1916—2007)、李崇尧(1916—2008)、钱荣堃(1917—2003)、闵庆全(1918—2011)、胡代光(1919—2012)、宋承先(1921—1999)、高鸿业(1921—2007)、赵靖(1922—2007)、王叔云(1923—2002)、甘培根(1925—2006)、钱伯海(1928—2004)等人对经济学教育事业的贡献也比较大。他们的许多教育经验,特别是在教育方法、学习方法、培养方法,并由此形成的教育思想值得我们学习。他们守得一身清风傲骨,为我国经济学理论创新提供了巨大的支持,他们的贡献将永远被人民铭记。

总体看,除了在国家机关、经济管理部门及智库机构工作的经济学家外,绝大多数经济学家都在高校任教或有过任教的经历。有的虽然不在高校,也有为数不少的经济学家欣然担任“兼职教授”“客座教授”“特聘教授”。这种风气应该鼓励,但不能徒有虚名。(完)